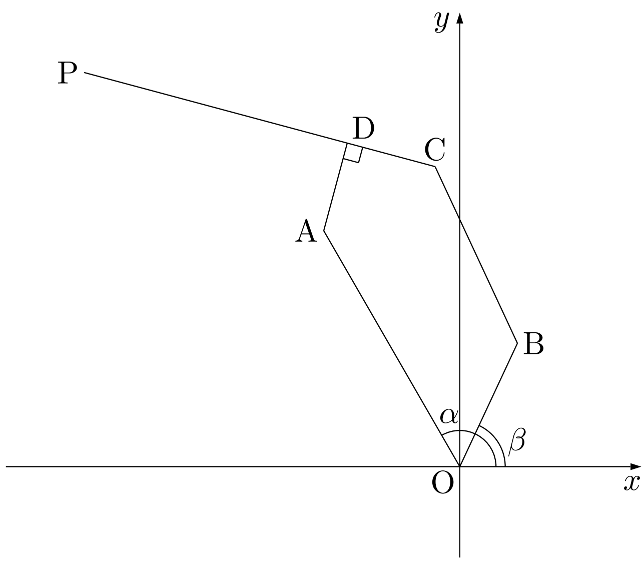
原点 O から伸びる線分 OA, OB があり，それぞれが
x 軸となす角を $\alpha,\ \beta\ (0<\beta<\alpha<\pi)$ とする．
さらに、点 A, B に接続する線分 AD, BC, および点 C に接続する線分 CP があり，
AD と CP は点 D で直交して接続されている．
各線分の長さはすべて一定とする．また CD の長さも一定とする．



$\mathrm{OA}=a,\ \mathrm{OB}=b,\ \mathrm{BC}=c,\ \mathrm{AD}=d,\ \mathrm{CD}=e,\ \mathrm{DP}=f$
とするとき，P の座標を $\alpha,\ \beta,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ で表せ．

$\mathrm{AC}=r$ とすると，$r=\sqrt{d^2+e^2}$
また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と x 軸とのなす角を θ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}a\cos\alpha\\ a\sin\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a\cos\alpha+r\cos\theta\\ a\sin\alpha+r\sin\theta\end{pmatrix}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\begin{pmatrix}a\cos\alpha+r\cos\theta\\ a\sin\alpha+r\sin\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b\cos\beta\\ b\sin\beta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a\cos\alpha+r\cos\theta-b\cos\beta\\ a\sin\alpha+r\sin\theta-b\sin\beta\end{pmatrix}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=c$ であるから，

$$\begin{aligned}c^2&=(a\cos\alpha+r\cos\theta-b\cos\beta)^2+(a\sin\alpha+r\sin\theta-b\sin\beta)^2\\&=(a^2\cos^2\alpha+r^2\cos^2\theta+b^2\cos^2\beta+2ar\cos\alpha\cos\theta-2rb\cos\theta\cos\beta-2ab\cos\alpha\cos\beta)\\&\quad+(a^2\sin^2\alpha+r^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\beta+2ar\sin\alpha\sin\theta-2rb\sin\theta\sin\beta-2ab\sin\alpha\sin\beta)\\&=a^2+b^2+r^2+2ar\cos(\alpha-\theta)-2rb\cos(\theta-\beta)-2ab\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$
$$\therefore\ c^2=a^2+b^2+d^2+e^2+2ar\cos(\alpha-\theta)-2rb\cos(\theta-\beta)-2ab\cos(\alpha-\beta)$$

$c^2=a^2+b^2+r^2-2ab\cos(\alpha-\beta)+2r\{(a\cos\alpha-b\cos\beta)\cos\theta+(a\sin\alpha-b\sin\beta)\sin\theta\}$
ここで $C_1=a\cos\alpha-b\cos\beta,\ C_2=a\sin\alpha-b\sin\beta$ とすると
$2r\{(a\cos\alpha-b\cos\beta)\cos\theta+(a\sin\alpha-b\sin\beta)\sin\theta\}=2r\sqrt{C_1^2+C_2^2}(\cos\gamma\cos\theta+\sin\gamma\sin\theta)$
ただしここで $\cos\gamma=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}},\ \sin\gamma=\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$ である．よって
$2r\sqrt{C_1^2+C_2^2}\cos(\theta-\gamma)=c^2-(a^2+b^2+r^2)+2ab\cos(\alpha-\beta)$

$$\therefore \cos(\theta-\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{d^2+e^2}\sqrt{C1^2+C2^2}}(c^2-(a^2+b^2+d^2+e^2)+2ab\cos(\alpha-\beta))$$

Rmk:

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha - b\cos\beta \\ a\sin\alpha - b\sin\beta \end{pmatrix}$ より, γ は線分 AB と x 軸の成す角であり, $\sqrt{C_1^2+C_1^2}$ は線分 AB の長さである.

この式より θ の値を求めることができれば，点 P の座標が計算できる.

$\angle$CAD$=\phi$ とおく。$\cos\phi = \dfrac{d}{r}$, $\sin\phi = \dfrac{e}{r}$ であり, これは α, β によらない。

原点を中心として角度を t だけ回転させる変換は行列を用いて $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ と書けることに注意する。さて、めんどくさいので $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおこう。

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は点 A を軸にして $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を ϕ だけ回転し、長さを $\dfrac{d}{r}$ 倍したものなので, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{d}{r}R(\phi)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる。

また, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の長さを $\dfrac{e+f}{e}$ 倍したものであるので

$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \dfrac{e+f}{e}\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{e+f}{e}\cdot\left(\dfrac{d}{r}R(\phi) - I\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる (ここで I は単位行列)。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ であるから結局

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \frac{e+f}{e}\left(\frac{d}{r}R(\phi) - I\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \left(\frac{e+f}{e}\cdot\frac{d}{r}R(\phi) - \frac{f}{e}I\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と書ける。行列部分を整理しよう。まず、

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix}$$

である。よって

$$R := \frac{e+f}{e}\cdot\frac{d}{r}R(\phi) - \frac{f}{e}I = \begin{pmatrix} \frac{e+f}{e}\cdot\frac{d}{r}\cdot\frac{d}{r} - \frac{f}{e} & -\frac{e+f}{e}\cdot\frac{d}{r}\cdot\frac{e}{r} \\ \frac{e+f}{e}\cdot\frac{d}{r}\cdot\frac{e}{r} & \frac{e+f}{e}\cdot\frac{d}{r}\cdot\frac{d}{r} - \frac{f}{e} \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\frac{e+f}{e}\cdot\frac{d^2}{r^2} - \frac{f}{e} &= \frac{1}{er^2}(ed^2+fd^2-f(d^2+e^2)) \\
&= \frac{1}{r^2}(d^2-fe)
\end{aligned}$$

なので

$$R = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} d^2-ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2-ef \end{pmatrix} \qquad \left(\det R = \frac{d^2+f^2}{r^2}\right)$$

と書ける。まとめると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\left(=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+R\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix}+\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} d^2-ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2-ef \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix}+\frac{1}{r}\begin{pmatrix} d^2-ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2-ef \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となることがわかる。これにより θ の値 (と α の値) が分かれば P の座標が求められる.

逆の問題も考察してみる.

$R_1 := rR$ とおくと $\det R_1 = d^2+f^2$ より R_1 は正則であり, $R_1^{-1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \cdots(\#)$

問題点を整理しよう。

1. 角度 α, β から θ を求められるか？ (逆の問題というか大前提)
2. P の座標が与えられた時、そこから α と θ が求められるか？（これはできそう）
3. 求められたとして、そのような α と θ は構造的に実現可能か？ (特に θ)

簡単そうなところである 2. から調べる。

$\det R_1 = r^2 \det R = d^2+f^2$ であって,

$R_1^{-1}=\dfrac{1}{r(d^2+f^2)}\begin{pmatrix} d^2-ef & d(e+f) \\ -d(e+f) & d^2-ef \end{pmatrix}=\dfrac{1}{d^2+f^2}R_1^T$. ($R^T$ は R の転置行列)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}\left|R_1^{-1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\right|^2&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)^T\left(R_1^{-1}\right)^T R_1^{-1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\ &=\frac{1}{d^2+f^2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\ &=\frac{1}{d^2+f^2}\left((x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2\right)\\ &=\frac{1}{d^2+f^2}\left(x^2+y^2+a^2-2a(\cos\alpha+\sin\alpha)\right)\\ &=\frac{1}{d^2+f^2}\left(x^2+y^2+a^2-2\sqrt{2}a\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\right)=:h(\alpha)\end{aligned}$$

(#) より $h(\alpha)=1$ となる α が求まればよい。

$$h(\alpha)=1 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2\sqrt{2}a}\left(x^2+y^2+a^2-(d^2+f^2)\right)\cdots(\#\#)$$

α の定義域 (可動域?) を $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$ とする。(理想は $0 \le \alpha \le \pi$?) $\alpha_0 < \dfrac{\pi}{4}$ だと考えやすい（し多分成り立つ）ので仮定する. また、現実的に多分 $\alpha_1 \le \dfrac{5\pi}{4}$ な気がするのでこれも仮定する. すると $L := \sin(\alpha_1+\frac{\pi}{4}) \le \sin(\alpha+\frac{\pi}{4}) \le 1$ が成り立ち, かつ三角関数の連続性からこの間の値なら α をうまくとることで実現可能である.

- ここで L は負の数を想定している．もし $\frac{5\pi}{4} \leq \alpha_1$ なら $L=-1$ である．
- またもし $\frac{\pi}{4} < \alpha_0$ なら上界が 1 ではなく $\sin(\alpha_0 + \frac{\pi}{4})$ に代わる．

よって (x, y) の取りうる範囲 (の必要条件) は

$$L \leq \frac{1}{2\sqrt{2}a}\left(x^2+y^2+a^2-(d^2+f^2)\right) \leq 1$$

x, y について整理すると

$$d^2+f^2-a^2+2\sqrt{2}aL \leq x^2+y^2 \leq d^2+f^2-a^2+2\sqrt{2}a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

となる．

Rmk

1. 上に述べたようにこれは必要条件であり θ の稼働可能な範囲によってもっと狭くなる．つまり①は"少なくともこの範囲になければならない範囲"である．
2. またこれはバウムクーヘンを切り取ったような形をしているが, 実際は θ の可能な範囲が α に依存する可能性もあるため, (x, y) のとりうる範囲はもっと複雑になる可能性がある．
3. α が $\frac{\pi}{4}$ 付近, すなわち $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 1$ の近くでは, α は一意的に決まらない可能性もある．ただしこれも θ との関係次第.
4. (x, y) が①の範囲にある時, (##) を用いて $\sin^{-1}$ が計算できれば α が得られ, α が得られればそこから $R_1^{-1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ が計算できるので θ も（定義域内にあれば）求められる気がする．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と x 軸とのなす角を t とすると，$t = \frac{\pi}{2} + \theta + \tan^{-1}\frac{e}{d}$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を決定することができる．