ロボットアームの順運動学及び逆運動学に関する報告書

アドウィン教育システム株式会社　沖坂祥平

2019 年 3 月 1 日

本稿ではロボットアームの動きの分析を行う. すなわち 3 つの入力角 (α, β, ϕ) を与えたとき, アームの位置 T の座標 (x, y, z) がどのような点に動くか (順運動学: Forward chinematics), また座標 (x, y, z) を与えたとき, T をその点に動かすためには入力角をどのようにすべきか (逆運動学: Inverse kinematics) を考える.

目次

1　準備

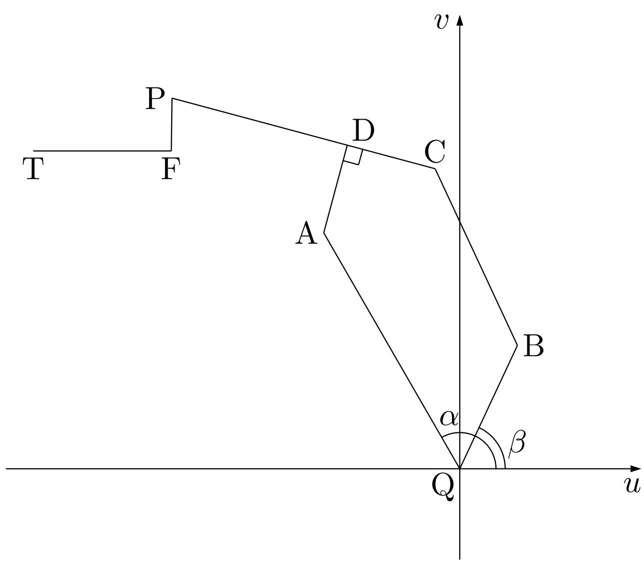
本稿では次の座標系 (及び部分空間) を使って問題を解析していく．

(1) 標準座標系: (x, y, z) 座標で表す．
実際にアームを動かした時の求める座標は, この座標系における座標である．

(2) アームを含み z 軸に平行な平面 p_ϕ: (u, v) 座標で表す (下図を参照).
この座標系における原点はアームの支点 Q である．この座標系は主に旋回角 ϕ を固定した時, 2 つの入力角 α (Shoulder angle) と β (Arm angle) によってアームの位置がどのように動くかを解析するときに用いる．ϕ に依存するのでこの平面を p_ϕ で表す．

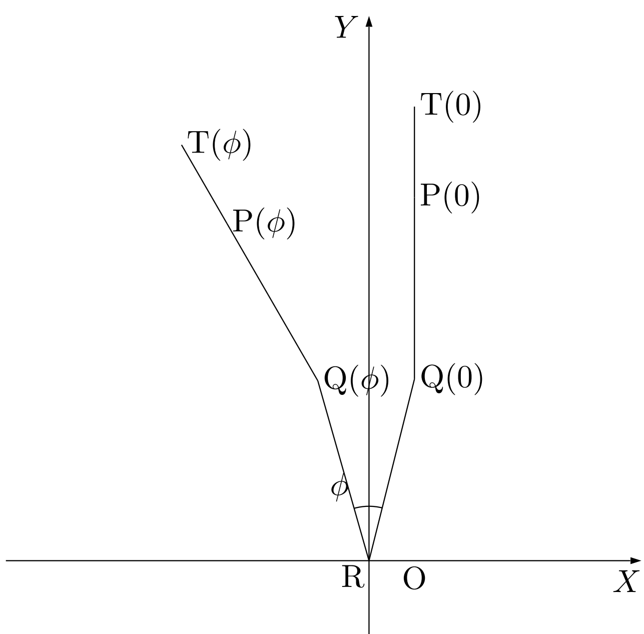
(3) 標準座標系の xy 平面への射影: (X, Y) 座標を用いて表す．
端的に言えば標準座標系を真上から見たものである．ただし, 計算の都合上この座標系における原点はベースの旋回中心 R とする (標準座標系における原点ではないことに注意する)．この座標系は主に逆運動学において ϕ を求めるときに扱う．

〈 平面 p_ϕ における各頂点の位置関係 〉
原点 Q から伸びる線分 QA, QB があり，それぞれが x 軸となす角を α, β $(0 < \beta < \alpha < \pi)$ とする．
さらに、点 A, B に接続する線分 AD, BC, および点 C に接続する線分 CP があり，
AD と CP は点 D で直交して接続されている．
各線分の長さはすべて一定とする．また CD の長さも一定とする．
T は P から u 方向に -135, v 方向に -15 動いた場所にある．



$\mathrm{QA} = a,\ \mathrm{QB} = b,\ \mathrm{BC} = c,\ \mathrm{AD} = d,\ \mathrm{CD} = e,\ \mathrm{DP} = f,\ \mathrm{PF} = 15,\ \mathrm{FT} = 135$ とするとき，T の座標 (u, v) を $\alpha,\ \beta,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ で表したい．

〈 XY 平面における各頂点の位置関係 〉
この座標系において R を原点としている．
初期状態での各頂点を Q(0),P(0),T(0) で表し，
ベースが角度 ϕ だけ旋回した時の各頂点を
それぞれ Q(ϕ),P(ϕ),T(ϕ) で表している．
Q,P,T は常に 1 つの直線上にあり，
特に初期状態において 3 点は $Y = 10$ の上にある．
また, 標準座標系における原点 O は X 軸上にある．



$\mathrm{RO} = 10,\ \mathrm{OQ} = 40$ である．
O と R の位置関係から T が標準座標系において

(x,y,z) の位置にある時には T の (X,Y) 座標は
$(X,Y)=(x+10,y)$ となる.

以後, 本稿にて使われる各頂点を表す記号の意味は次に示すとおりである.

O: 標準座標系における原点
Q: アームの支点
R: ベースの旋回中心
A,B,C,D,P: 図の位置関係にある各関節部位
T: アームの位置. T の (x,y,z) 座標を求めることが目標である.

また入力角の定義域は以下のとおりとする .
α: Shoulder angle (肩角度) $\dfrac{\pi}{3}\leq\alpha\leq\dfrac{8\pi}{9}$ (60 度 $\leq\alpha\leq$ 160 度)
β: Arm angle (腕角度) $\dfrac{19\pi}{90}\leq\beta\leq\alpha-\dfrac{\pi}{9}$ (38 度 $\leq\beta\leq\alpha-20$ 度)
ϕ: ベースの旋回角 $-\dfrac{\pi}{2}\leq\phi\leq\dfrac{\pi}{2}$ (-90 度 $\leq\phi\leq$ 90 度)

$\alpha=\dfrac{\pi}{3},\ \beta=\dfrac{19\pi}{90},\ \phi=0$ の状態を初期状態と呼ぶ. 初期状態での標準座標系における各頂点の座標 (x,y,z) は以下のとおりである.
Q$=(0,40,100)$
R$=(-10,0,0)$
P$=(0,95,215)$
T$=(0,260,230)$
Remark:

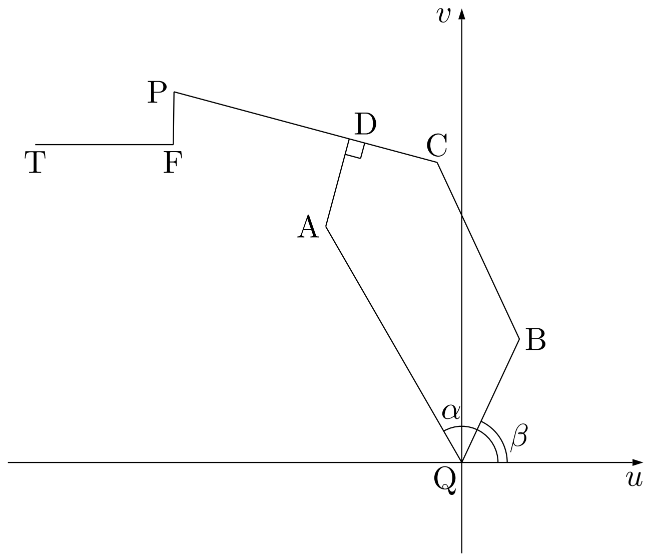
(1) Q は入力角度によって変わらないが, R や P 等, その他の点は当然入力角度によって移動する. 入力角度 (α,β,ϕ) である時の各頂点の標準座標系における座標を必要であれば P(α,β,ϕ) のようにあらわす.
例: $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{19\pi}{90},0\right)=(0,95,215)$ (初期状態での P の座標)
混乱の恐れがない限り各頂点は角度を省略してアルファベット 1 文字で表す.
(2) 角度 α, β は p_ϕ における u 軸と成す角で定める. また、ϕ は XY 平面における Y 軸と成す角とする.

以上の準備の下, 点 T の位置を求めていく.

2 順運動学

入力角度 (α,β,ϕ) が与えられたとする. まず最初に, p_ϕ における T の (u,v) 座標を求めていく. p_ϕ における原点は Q であることに注意する.

$\mathrm{AC}=r$ とすると，$r=\sqrt{d^2+e^2}$
また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と u 軸のなす角を θ とすると，



$\mathrm{QA}=a,\ \mathrm{QB}=b,\ \mathrm{BC}=c,\ \mathrm{AD}=d,\ \mathrm{CD}=e,\ \mathrm{DP}=f$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QC}}&=\begin{pmatrix}a\cos\alpha\\ a\sin\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a\cos\alpha+r\cos\theta\\ a\sin\alpha+r\sin\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{QC}}-\overrightarrow{\mathrm{QB}}\\&=\begin{pmatrix}a\cos\alpha+r\cos\theta\\ a\sin\alpha+r\sin\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b\cos\beta\\ b\sin\beta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a\cos\alpha+r\cos\theta-b\cos\beta\\ a\sin\alpha+r\sin\theta-b\sin\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=c$ であるから，

$$\begin{aligned}c^2&=(a\cos\alpha+r\cos\theta-b\cos\beta)^2+(a\sin\alpha+r\sin\theta-b\sin\beta)^2\\&=(a^2\cos^2\alpha+r^2\cos^2\theta+b^2\cos^2\beta+2ar\cos\alpha\cos\theta-2rb\cos\theta\cos\beta-2ab\cos\alpha\cos\beta)\\&\quad+(a^2\sin^2\alpha+r^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\beta+2ar\sin\alpha\sin\theta-2rb\sin\theta\sin\beta-2ab\sin\alpha\sin\beta)\\&=a^2+b^2+r^2+2ar\cos(\alpha-\theta)-2rb\cos(\theta-\beta)-2ab\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$$\therefore\ c^2=a^2+b^2+d^2+e^2+2ar\cos(\alpha-\theta)-2rb\cos(\theta-\beta)-2ab\cos(\alpha-\beta)$$

また

$$c^2=a^2+b^2+r^2-2ab\cos(\alpha-\beta)+2r\{(a\cos\alpha-b\cos\beta)\cos\theta+(a\sin\alpha-b\sin\beta)\sin\theta\}$$

が成り立つ．
ここで $C_1=a\cos\alpha-b\cos\beta,\ C_2=a\sin\alpha-b\sin\beta$ とすると

$$2r\{(a\cos\alpha-b\cos\beta)\cos\theta+(a\sin\alpha-b\sin\beta)\sin\theta\}=2r\sqrt{C_1^2+C_2^2}(\cos\gamma\cos\theta+\sin\gamma\sin\theta)$$

ただしここで $\cos\gamma=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}},\ \sin\gamma=\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$ である．よって
$2r\sqrt{C_1^2+C_2^2}\cos(\theta-\gamma)=c^2-(a^2+b^2+r^2)+2ab\cos(\alpha-\beta)$

$$\cos(\theta-\gamma)=\frac{1}{2\sqrt{d^2+e^2}\sqrt{C1^2+C2^2}}(c^2-(a^2+b^2+d^2+e^2)+2ab\cos(\alpha-\beta))$$

が成り立つことがわかる．

<u>Remark</u>:

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha - b\cos\beta \\ a\sin\alpha - b\sin\beta \end{pmatrix}$ より, γ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と u 軸の成す角であり, $\sqrt{C_1^2 + C_1^2}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の長さである. $\gamma > \theta$ に注意すると,

$$\theta = \gamma - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{d^2+e^2}\sqrt{C_1^2+C_2^2}}(c^2 - (a^2+b^2+d^2+e^2) + 2ab\cos(\alpha-\beta))\right)$$

ただしここで $\gamma = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right) & (C_2 \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right) & (C_2 < 0) \end{cases}$ である. ($0 \leq \cos^{-1} y \leq \pi$ に注意)

この式より θ の値を求めることができれば，点 P の (u, v) 座標が計算できる. 以下, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を求めていく.

$\angle$CAD$= \varphi$ とおく. $\cos\varphi = \dfrac{d}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{e}{r}$ であり, これは α, β によらない.
原点を中心として角度を t だけ回転させる変換は行列を用いて $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ と書けることに注意する.
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は点 A を軸にして $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を φ だけ回転し、長さを $\dfrac{d}{r}$ 倍したものなので, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{d}{r}R(\varphi)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる.
また, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の長さを $\dfrac{e+f}{e}$ 倍したものであるので

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \frac{e+f}{e}\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{e+f}{e}\cdot\left(\frac{d}{r}R(\varphi) - I\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる (ここで I は単位行列).
$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ であるから結局

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{QP}} &= \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} + \frac{e+f}{e}\left(\frac{d}{r}R(\varphi) - I\right)\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \left(\frac{e+f}{e}\cdot\frac{d}{r}R(\varphi) - \frac{f}{e}I\right)\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける. 行列部分を整理しよう. まず,

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix}$$

である. よって

$$R := \frac{e+f}{e}\cdot\frac{d}{r}R(\varphi) - \frac{f}{e}I = \begin{pmatrix} \dfrac{e+f}{e}\cdot\dfrac{d}{r}\cdot\dfrac{d}{r} - \dfrac{f}{e} & -\dfrac{e+f}{e}\cdot\dfrac{d}{r}\cdot\dfrac{e}{r} \\ \dfrac{e+f}{e}\cdot\dfrac{d}{r}\cdot\dfrac{e}{r} & \dfrac{e+f}{e}\cdot\dfrac{d}{r}\cdot\dfrac{d}{r} - \dfrac{f}{e} \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{e+f}{e}\cdot\frac{d^2}{r^2} - \frac{f}{e} &= \frac{1}{er^2}(ed^2 + fd^2 - f(d^2+e^2)) \\ &= \frac{1}{r^2}(d^2 - fe) \end{aligned}$$

なので

$$R = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} d^2 - ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2 - ef \end{pmatrix} \qquad \left(\mathrm{det}R = \frac{d^2+f^2}{r^2}\right)$$

と書ける. まとめると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}}\left(= \overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{QA}} + R\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} d^2 - ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2 - ef \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\begin{pmatrix} d^2 - ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2 - ef \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となることがわかる. これにより θ の値 (と α の値) が分かれば P の座標が求められる.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QT}} &= \overrightarrow{\mathrm{QP}} + \overrightarrow{\mathrm{PT}} \\ &= \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\begin{pmatrix} d^2 - ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2 - ef \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -135 \\ -15 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より, アームの位置 T の (u, v) 座標が求められた.

次に入力角度 (α, β, ϕ) から XY 平面を経由して点 T の標準座標系における座標 (x, y, z) を求めよう.
以前の議論から

$$\overrightarrow{\mathrm{QT}} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\begin{pmatrix} d^2 - ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2 - ef \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -135 \\ -15 \end{pmatrix}$$

ただし、ここで

$$\theta = \gamma - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{d^2+e^2}\sqrt{C_1^2+C_2^2}}(c^2 - (a^2+b^2+d^2+e^2) + 2ab\cos(\alpha-\beta))\right)$$

であった.
まず, XY 平面において, Q の初期値 ($\phi = 0$ の時のアームの支点の位置) は $Q_0 = (X, Y) = (10, 40)$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QT}}$ は Y 軸方向を向いていることに注意する (上図参照). すなわち, 初期状態の時, 点 Q,P,T は直線 l_0 : $X = 10$ 上にある.

旋回中心 R が ϕ だけ回転すると, XY 平面において l_0 は

$$\begin{aligned}l_\phi : R(\phi)\begin{pmatrix} 10 \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10\cos\phi - Y\sin\phi \\ Y\cos\phi + 10\sin\phi \end{pmatrix} \\ &= Y\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\cos\phi \\ 10\sin\phi \end{pmatrix} \qquad (Y \text{ は任意})\end{aligned}$$

に写る. ここで $R(\phi)$ は回転行列である. 書き換えると

$$l_\phi : Y\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\cos\phi - 40\sin\phi \\ 10\sin\phi + 40\cos\phi \end{pmatrix} \qquad (Y \text{ は任意})$$

となる.
$Y = 0$ の時, 点 Q の (X, Y) 座標を表しているので, 結局 l_ϕ は XY 平面において点 Q を通り, 傾きが

$-\dfrac{1}{\tan\phi}$ の直線を表している．また, l_ϕ は点 Q,P,T を含んでいる事に注意する．

Q の (X,Y) 座標が $\begin{pmatrix} 10\cos\phi - 40\sin\phi \\ 10\sin\phi + 40\cos\phi \end{pmatrix}$ の時, (x,y,z) 座標は $\begin{pmatrix} -10 + 10\cos\phi - 40\sin\phi \\ 10\sin\phi + 40\cos\phi \\ 100 \end{pmatrix}$ である

から $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QT}}$ より, R が ϕ だけ回転した時, アームの位置 T は平面

$$\tilde{p}_\phi : \begin{pmatrix} -10 + 10\cos\phi - 40\sin\phi \\ 10\sin\phi + 40\cos\phi \\ 100 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (Y, Z \text{ は任意})$$

内にあることがわかる．

$$\vec{U} := -\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると, 上の式から $\overrightarrow{\mathrm{QT}} = Y\vec{U} + Z\vec{V}$ であるが, $\tilde{p}_\phi$ はアームを含み z 軸に平行な平面であるので p_ϕ と一致することがわかる．(u,v) 座標で考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{QT}} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\begin{pmatrix} d^2 - ef & -d(e+f) \\ d(e+f) & d^2 - ef \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -135 \\ -15 \end{pmatrix}$$

であったので, 結局 $Y = u, Z = v$ とすればよい．以上から

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OT}} &= u\vec{U} + v\vec{V} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\
&= \left(-135 + a\cos\alpha + \frac{1}{r}\left((d^2 - ef)\cos\theta - d(e+f)\sin\theta\right)\right)\begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \left(-15 + a\sin\alpha + \frac{1}{r}\left(d(e+f)\cos\theta + (d^2 - ef)\sin\theta\right)\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} -10 + 10\cos\phi - 40\sin\phi \\ 10\sin\phi + 40\cos\phi \\ 100 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただしここで

$$\theta = \gamma - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{d^2+e^2}\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}(c^2 - (a^2 + b^2 + d^2 + e^2) + 2ab\cos(\alpha - \beta))\right)$$

$$C_1 = a\cos\alpha - b\cos\beta, \quad C_2 = a\sin\alpha - b\sin\beta, \quad \gamma = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right) & (C_2 \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right) & (C_2 < 0) \end{cases} \quad \text{である．}$$

3　逆運動学

逆の問題を考察していく. すなわち標準座標系における位置 (x,y,z) を与えたとき, 点 T がその位置に動くような入力角度 (α, β, ϕ) を求めよう．

まず, XY 平面において点 (x, y, z) の座標は $(X, Y) = (x + 10, y)$ であるので, まず XY 平面において点 T が $(x + 10, y)$ に動くような旋回角 ϕ を求める.

ϕ だけ回転させた時, アームの支点 Q の (X, Y) 座標は $\begin{pmatrix} 10\cos\phi - 40\sin\phi \\ 10\sin\phi + 40\cos\phi \end{pmatrix}$ である. Q から $(x+10, y)$ に向かうベクトルと $\overrightarrow{\mathrm{QT}}$ が一致するので

$$\frac{y - (10\sin\phi + 40\cos\phi)}{x + 10 - (10\cos\phi - 40\sin\phi)} = -\frac{1}{\tan\phi}$$

が成り立つ (直線 l_ϕ の傾きを参照). これを整理すると

$$(x + 10)\cos\phi + y\sin\phi = 10$$

となり加法定理から

$$\sin(\phi + \psi) = \frac{10}{\sqrt{(x + 10)^2 + y^2}}$$

が成り立つ. ここで $\cos\psi = \dfrac{y}{\sqrt{(x + 10)^2 + y^2}}, \quad \sin\psi = \dfrac{x + 10}{\sqrt{(x + 10)^2 + y^2}} \quad (-\pi \leq \psi \leq \pi)$ である.

よって

$$\phi = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{(x + 10)^2 + y^2}}\right) - \sin^{-1}\left(\dfrac{x + 10}{\sqrt{(x + 10)^2 + y^2}}\right) & (y \geq 0) \\ \sin^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{(x + 10)^2 + y^2}}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{x + 10}{\sqrt{(x + 10)^2 + y^2}}\right) - \pi & (y < 0) \end{cases}$$

である.

次に ϕ を用いて, α, β も求めていく.

まず, 平面 p_ϕ において座標 (u, v) が与えられたときに点 T が (u, v) に動くような角度 α, β を求める.

点 T が (u, v) にある時, 点 P は p_ϕ において $(s, t) = (u + 135, v + 15)$ の位置にある. $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の u 軸の成す角を Θ, $\chi = \angle$ AQP とすると

$$\Theta = \alpha + \chi$$

である. 三角形 AQP に余弦定理を用いて

$$\cos\chi = \frac{s^2 + t^2 + a^2 - (d^2 + f^2)}{2a\sqrt{s^2 + t^2}}$$

を得る. よって

$$\alpha = \Theta - \chi = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{s^2 + t^2 + a^2 - (d^2 + f^2)}{2a\sqrt{s^2 + t^2}}\right) & (t \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{s^2 + t^2 + a^2 - (d^2 + f^2)}{2a\sqrt{s^2 + t^2}}\right) & (t < 0) \end{cases}$$

である. また, $\psi := \angle\mathrm{QAP} = 2\pi - (\angle\mathrm{PAC} + \theta + (\pi - \alpha)) = \pi + \alpha - \angle\mathrm{PAC} - \theta \quad \cdots (\#\#\#)$ であるが, 再び余弦定理から

$$\cos\psi = \frac{a^2 + d^2 + f^2 - (s^2 + t^2)}{2a\sqrt{d^2 + f^2}}$$

であり, また

$$\cos\angle\mathrm{PAC} = \frac{(d^2+f^2)+(d^2+e^2)-(e+f)^2}{2\sqrt{d^2+f^2}\sqrt{d^2+e^2}} = \frac{d^2-ef}{\sqrt{d^2+f^2}\sqrt{d^2+e^2}}$$

が成り立つ (A を原点と思って $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を x 軸と思うと考えやすい). よって (###) から

$$\theta = \pi + \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{a^2+d^2+f^2-(s^2+t^2)}{2a\sqrt{d^2+f^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{d^2-ef}{\sqrt{d^2+f^2}\sqrt{d^2+e^2}}\right)$$

である. これで α と θ の値は求められたので β の値を求めていく。

まず, $\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha + r\cos\theta \\ a\sin\alpha + r\sin\theta \end{pmatrix}$ であり、$\overrightarrow{\mathrm{QC}}$ と u 軸の成す角を δ とする。 すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos(\alpha-\theta), \quad \delta = \cos^{-1}\left(\frac{a\cos\alpha + r\cos\theta}{|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|}\right)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = c$ の式から

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\cos\alpha + r\cos\theta - b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + r\sin\theta - b\sin\beta)^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{QC}}|^2 + b^2 - 2b\left((a\cos\alpha + r\cos\theta)\cos\beta + (a\sin\alpha + r\sin\theta)\sin\beta\right) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{QC}}|^2 + b^2 - 2b|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|\cos(\delta-\beta) \end{aligned}$$

よって

$$\cos(\delta-\beta) = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|^2 + b^2 - c^2}{2b|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|}$$

$\delta > \beta$ より β に関して解くと

$$\beta = \delta - \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|^2 + b^2 - c^2}{2b|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|}\right)$$

以上をまとめると点 T の平面 p_ϕ における位置座標 (u, v) が与えられた時, アームがその位置に動くような入力角度 α, β は $s = u + 135$, $t = v + 15$ として

$$\begin{aligned} \alpha &= \Theta - \chi \\ &= \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{s^2+t^2+a^2-(d^2+f^2)}{2a\sqrt{s^2+t^2}}\right) & (t \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{s^2+t^2+a^2-(d^2+f^2)}{2a\sqrt{s^2+t^2}}\right) & (t < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \delta - \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + b^2 - c^2}{2b|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{a\cos\alpha + r\cos\theta}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos(\alpha-\theta)}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{a^2+r^2+2ar\cos(\alpha-\theta)+b^2-c^2}{2b\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos(\alpha-\theta)}}\right) \end{aligned}$$

で与えられる. ただし, ここで

$$\theta = \pi + \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{a^2+d^2+f^2-(s^2+t^2)}{2a\sqrt{d^2+f^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{d^2-ef}{\sqrt{d^2+f^2}\sqrt{d^2+e^2}}\right)$$

である。

さて, すでに ϕ は既知であるから, あとは ϕ を固定した時の点 T の p_ϕ における (u, v) 座標を x, y, z を用いて表せられれば上の式から α 及び β が求められる. XY 平面において

$$\overrightarrow{\mathrm{QT}} = \begin{pmatrix} x + 10 - (10\cos\phi - 40\sin\phi) \\ y - (10\sin\phi + 40\cos\phi) \end{pmatrix}$$

であればよいから, これは標準座標系において

$$\overrightarrow{\mathrm{QT}} = \begin{pmatrix} x + 10 - (10\cos\phi - 40\sin\phi) \\ y - (10\sin\phi + 40\cos\phi) \\ z - 100 \end{pmatrix}$$

であればよいことになる.

$$\vec{U} := -\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として $\overrightarrow{\mathrm{QT}} = u\vec{U} + v\vec{V}$ であったので $v = z - 100$, かつ

$$u = \begin{cases} \dfrac{x + 10 - (10\cos\phi - 40\sin\phi)}{\sin\phi} & (\sin\phi \neq 0 \ i.e.\phi \neq 0) \\ -y + 40 & (\sin\phi = 0 \ i.e.\phi = 0) \end{cases}$$

である.

4　パルス数の計算

これまでは角度の組 (α, β, ϕ) を与えて座標 (x, y, z) を導いてきたが, 実際は角度を直接入力するのではなくパルス数を入力し, それを角度に換算してアームを動かす. よってこの章ではパルス数を入力したとき, 入力角度 (α, β, ϕ) はいくつになるか, また入力角度を (α, β, ϕ) としたいときに入力するパルス数はいくつにすればよいかの変換式を与える.

まず, 歯車を 1 回転 (360 度) 回転させるのに必要なパルス数は 51200 であることがわかっている.

$\alpha,\ \beta$ に対応している歯車のギア比は 45 : 11, ϕ に対応している歯車とのギア比は 45 : 21 となっているので α, β を θ 度動かしたいときのパルス数 P は

$$P = 51200 \times \frac{45}{11} \times \frac{\theta}{360}$$

で与えられ, ϕ を 1 度動かしたいときのパルス数は

$$P = 51200 \times \frac{45}{21} \times \frac{\theta}{360}$$

で与えられることがわかる.

しかし, 実際は初期状態において $\alpha = 60,\ \beta = 38,\ \phi = 0$ の値をとっているので (α, β, ϕ) を入力角度としたい場合はパルスの入力数は

$$P_\alpha = \frac{230400}{396} \times (\alpha - 60)$$

$$P_\beta = \frac{230400}{396} \times (\beta - 38)$$

$$P_\phi = \frac{230400}{756} \times \phi$$

で与えられる. 逆にパルス数 $(P_\alpha, P_\beta, P_\phi)$ が入力として与えられたとき, 入力角度は

$$\alpha = \frac{396}{230400} P_\alpha + 60, \quad \beta = \frac{396}{230400} P_\beta + 38, \quad \phi = \frac{756}{230400} P_\phi$$

となる.

5　結論

今までの議論をまとめると以下のようになる.

A.　順運動学

入力パルス $(P_\alpha, P_\beta, P_\phi)$ が与えられたとき, 対応する入力角度は

$$\alpha = \frac{396}{230400}P_\alpha + 60, \quad \beta = \frac{396}{230400}P_\beta + 38, \quad \phi = \frac{756}{230400}P_\phi$$

と計算され, アームの位置 T の座標 (x, y, z) は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \left(-135 + a\cos\alpha + \frac{1}{r}\left((d^2 - ef)\cos\theta - d(e+f)\sin\theta\right)\right)\begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(-15 + a\sin\alpha + \frac{1}{r}\left(d(e+f)\cos\theta + (d^2 - ef)\sin\theta\right)\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -10 + 10\cos\phi - 40\sin\phi \\ 10\sin\phi + 40\cos\phi \\ 100 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる. ただしここで

$$\theta = \gamma - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{d^2+e^2}\sqrt{C_1^2+C_2^2}}(c^2 - (a^2+b^2+d^2+e^2) + 2ab\cos(\alpha-\beta))\right)$$

$$C_1 = a\cos\alpha - b\cos\beta, \quad C_2 = a\sin\alpha - b\sin\beta, \quad \gamma = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right) & (C_2 \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right) & (C_2 < 0) \end{cases}$$

である.

B.　逆運動学

また, アームの位置 T を座標 (x, y, z) に動かしたいときは, まず,

$$\phi = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{(x+10)^2+y^2}}\right) - \sin^{-1}\left(\dfrac{x+10}{\sqrt{(x+10)^2+y^2}}\right) & (y \geq 0) \\ \sin^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{(x+10)^2+y^2}}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{x+10}{\sqrt{(x+10)^2+y^2}}\right) - \pi & (y < 0) \end{cases}$$

とし, 次に

$$u = \begin{cases} \dfrac{x + 10 - (10\cos\phi - 40\sin\phi)}{\sin\phi} & (\sin\phi \neq 0 \ i.e. \phi \neq 0) \\ -y + 40 & (\sin\phi = 0 \ i.e. \phi = 0) \end{cases}$$

$$v = z - 100$$

と定め $s = u + 135,\ t = v + 15$ として

$$\alpha = \Theta - \chi$$
$$= \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{s^2+t^2+a^2-(d^2+f^2)}{2a\sqrt{s^2+t^2}}\right) & (t \geq 0) \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{s^2+t^2+a^2-(d^2+f^2)}{2a\sqrt{s^2+t^2}}\right) & (t < 0) \end{cases}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{a\cos\alpha + r\cos\theta}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos(\alpha-\theta)}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{a^2+r^2+2ar\cos(\alpha-\theta)+b^2-c^2}{2b\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos(\alpha-\theta)}}\right)$$

と定める．ただし，ここで

$$\theta = \pi + \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{a^2+d^2+f^2-(s^2+t^2)}{2a\sqrt{d^2+f^2}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{d^2-ef}{\sqrt{d^2+f^2}\sqrt{d^2+e^2}}\right)$$

である．最後にこのようにして求めた (α, β, ϕ) に対し

$$P_\alpha = \frac{230400}{396} \times (\alpha - 60)$$

$$P_\beta = \frac{230400}{396} \times (\beta - 38)$$

$$P_\phi = \frac{230400}{756} \times \phi$$

とすればよい．